

5. Devoir maison : Suites et point fixe

Durée conseillée : 1 heure. Toutes les questions doivent être traitées par écrit ; si votre recherche n'est pas fructueuse, laissez-en une trace écrite pour chaque question non résolue.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe \mathcal{C} représentative de f ainsi que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α la solution.
On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} , placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 .
Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
4. (a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

où α est le réel défini dans la question 2.

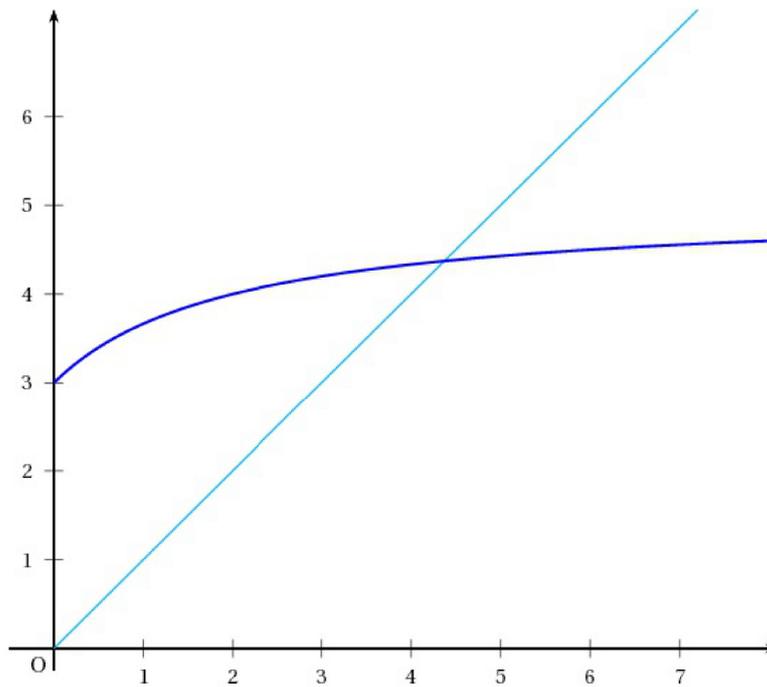
(b) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

5. Pour tout entier naturel n , on définit la suite (S_n) par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

- (a) Calculer S_0, S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
- (b) Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.
- (c) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Annexe 1 à rendre avec la copie



Annexe 2 à rendre avec la copie

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1 s prend la valeur u i prend la valeur 0 Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que ... Affecter à i la valeur $i + 1$ Affecter à u la valeur ... Affecter à s la valeur ... Fin Tant que
Sortie :	Afficher s .